

# *Eigenwerte, Eigenvektoren, Basistransformation*

# Determinante

Charakteristikum von *quadratischen* Matrizen, das einer Matrix einen Skalar zuordnet.

- Ein Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante ihrer Koeffizientenmatrix ungleich 0 ist.  
Ist die Determinante gleich 0, dann ist das Gleichungssystem entweder unlösbar oder hat unendlich viele Lösungen.

## Beispiel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad \text{hat formal die Lösungen } x = \frac{ed-bf}{ad-bc}, y = \frac{af-ce}{ad-bc}$$

- $ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow$  eindeutige Lösung
- $ad - bc = 0 \Leftrightarrow$  keine eindeutige Lösung, Rang der Koeffizientenmatrix  $< 2$

# Determinante

Jede quadratische Matrix hat eine Determinante:

## *Determinante*

Die Determinante ist eine Funktion  $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$   
mit den folgenden Eigenschaften:

- (D1)  $\det I = 1$
- (D2) Sind die Zeilen/Spalten einer Matrix linear abhängig, so ist deren Determinante gleich 0.
- (D3)  $\forall \lambda \in K, v \in K^n$  und für  $i = 1, 2, \dots, n$  gilt:

$$\begin{aligned}\det(z_1, \dots, \lambda z_i, \dots, z_n) &= \lambda \det(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n) \\ \det(z_1, \dots, z_i + v, \dots, z_n) &= \det(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n) + \\ &\quad \det(z_1, \dots, v, \dots, z_n)\end{aligned}$$

**Notation:**  $|A| := \det(A)$

# Eigenschaften

- Eine Matrix (und somit auch eine lineare Abbildung) ist nur dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich null ist.
- Anschauliche Interpretation für Matrizen aus  $K^{2 \times 2}$  und aus  $K^{3 \times 3}$  (bis auf das Vorzeichen):
  - Im  $K^{2 \times 2}$  gibt die Determinante die Fläche des von den Zeilen-/Spaltenvektoren aufgespannten Parallelogramms an
  - Im  $K^{3 \times 3}$  das Volumen des von den Zeilen-/Spaltenvektoren aufgespannten Körpers (Parallelepiped/Spat)
  - Analog im  $K^{n \times n} \dots \rightarrow n\text{-dimensionales Volumen}$
- *Eindeutigkeit*: Es gibt genau eine Determinantenfunktion  $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$  mit den Eigenschaften (D1), (D2), (D3).

# Eigenschaften

- Die Determinante einer Matrix ist gleich der Determinante der transponierten Matrix

$$\det(A) = \det(A^T)$$

- Für Matrizen  $A, B \in K^{n \times n}$  gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

- Für invertierbare Matrizen  $A \in K^{n \times n}$  gilt:

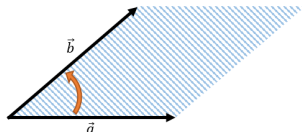
$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

# Berechnung von Determinanten

**Spezialfall:**  $2 \times 2$  **Matrix**  $\rightarrow$  „Hauptachse minus Nebenachse“

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \textcolor{green}{a} & \textcolor{red}{b} \\ \textcolor{red}{c} & \textcolor{green}{d} \end{vmatrix} = \textcolor{green}{a} \cdot \textcolor{green}{d} - \textcolor{red}{b} \cdot \textcolor{red}{c}$$

**Flächeninhalt/Volumen:**  $A_{\text{Parallelogramm}} = |\det\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right)|$



Ist der Winkel zwischen den beiden linear unabhängigen Vektoren (gegen den UZS gemessen) kleiner als  $180^\circ$ , so ist  $\det$  positiv, ansonsten negativ. Bei linear abhängigen Vektoren (Winkel  $= 180^\circ$ ) ist  $\det = 0$ .

# Berechnung von Determinanten

## **Variante 1:** elementare Zeilenumformungen / Gauß Algorithmus

- Das Vertauschen zweier Zeilen kehrt das Vorzeichen der Determinante um.
- Die Addition des  $\lambda$ -fachen einer Zeile zu einer anderen ändert die Determinante nicht.
- Multipliziert man eine Zeile mit einem Faktor  $\lambda \in K$ , so gilt:

$$\det(z_1, \dots, \lambda z_i, \dots, z_n) = \lambda \det(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n)$$

Beweise siehe Hartmann ...

# Berechnung der Determinante mit Gauß Algorithmus

- Erzeuge “obere Dreiecksform” mit elementaren Zeilenumformungen
- ⇒ Determinante = Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonale
- Viele Operationen ändern die Determinante nicht; manche Operationen muss man sich merken:
    - Zeilenvertauschung → mit  $-1$  multiplizieren
    - Multiplikation mit Skalar → mit dem Kehrwert multiplizieren

A			I			
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	0	1	0	-i
0	1	3	0	0	1	
1	0	0	1	0	0	
0	0	1	-1	1	0	
0	1	3	0	0	1	-3 ii
1	0	0	1	0	0	
0	0	1	-1	1	0	↓
0	1	0	3	-3	1	↑
1	0	0	1	0	0	
0	1	0	3	-3	1	
0	0	1	-1	1	0	
I			A <sup>-1</sup>			

Zeilenvertauschungen: 1  
keine Multiplikation mit Skalaren  
→  $\det(A) = -1 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1) = -1$

Auf  $A^{-1}$  wurden genau die gleichen Operationen angewandt (nur in umgekehrter Reihenfolge)  
⇒  $\det(A) = \det(A^{-1})$



# Berechnung der Determinante mit Gauß Algorithmus

$$i : x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$$

$$ii : -x_2 + 3x_3 - x_4 = 10$$

$$iii : 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -13$$

$$iv : x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -6$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & -13 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -2i \\ -i \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 7 & -5 & -2 & -13 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +7ii \\ +3ii \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 24 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{7}{16}iii \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{16} & -\frac{15}{16} \end{array} \right) \cdot \left( \frac{16}{15} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

keine Zeilenvertauschungen, skalare Multiplikation nur mit  $\frac{16}{15}$

$$\Rightarrow \det(A) = \frac{15}{16} \cdot 1 \cdot -1 \cdot 16 \cdot 1 = -15$$

# Berechnung von Determinanten

## Variante 2: Entwicklung nach einer Zeile / Spalte

### Entwicklungssatz von Laplace

Sei  $A \in K^{n \times n}$  und  $A_{ij}$  die  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die aus  $A$  entsteht, wenn man die  $i$ -te Zeile und die  $j$ -te Spalte streicht. Dann gilt:

- $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \dots$  Entwicklung nach der  $i$ -ten Zeile
- $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \dots$  Entwicklung nach der  $j$ -ten Spalte

# Entwicklungssatz von Laplace

- 1 Auswählen einer beliebigen Zeile oder Spalte als Pivot-Zeile/Spalte
- 2 Für jedes Element in der Pivot-Zeile/Spalte: die korrespondierende Spalte/Zeile, in der das Element steht (sowie die Pivot-Zeile/Spalte selbst) streichen und die Determinante der übrigen Matrix mit dem Element multiplizieren, wobei sich das Vorzeichen aus folgendem

Schachbrettmuster ergibt: 
$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \\ + & - & \ddots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

- 3 Summation dieser Produkte

... kann rekursiv so lange fortgesetzt werden, bis nur noch  $2 \times 2$  Matrizen zu berechnen sind

# Beispiele Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix} =$$

$$= a \left( -g \begin{vmatrix} j & l \\ n & p \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} f & h \\ n & p \end{vmatrix} - o \begin{vmatrix} f & h \\ j & l \end{vmatrix} \right) - b(\dots) + c(\dots) - d(\dots)$$

**Beachten Sie:** Als Pivot-Zeilen/Spalten eignen sich vor allem jene mit möglichst vielen Nullen!

# Eigenwerte, Eigenvektoren

## Definition

Sei  $A : K^n \rightarrow K^n$  eine lineare Abbildung.  $\lambda \in K$  heißt **Eigenwert** von  $A$ , wenn es einen Vektor  $v \neq 0$  gibt, mit der Eigenschaft  $Av = \lambda v$ . Der Vektor  $v \in K^n$  heißt **Eigenvektor** zum Eigenwert  $\lambda \in K$ , wenn gilt  $Av = \lambda v$ .

*... oder einfacher:*

Eigenvektoren sind jene Vektoren des Urbildes, die nach der Abbildung ihre Richtung behalten und lediglich um einen Skalierungsfaktor (Eigenwert) gestreckt werden.

# Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

Mögliche Vorgehensweise:

- 1 Aufstellen des charakteristischen Polynoms  $\det(A - \lambda I)$
- 2 Berechnen der Eigenwerte  $\lambda_i$  durch Lösen der charakteristischen Gleichung  $\det(A - \lambda I) = 0$
- 3 Berechnung der Eigenvektoren  $v_i$  für jeden Eigenwert  $\lambda_i$  durch  $(A - \lambda I)v = \vec{0}$

# Beispiel Eigenwerte, Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aufstellen des charakteristischen Polynoms  $\det(A - \lambda I)$ :

$$\det \left( \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda)$$

- Berechnen der Eigenwerte  $\lambda_i$  durch Lösen der charakteristischen Gleichung  $\det(A - \lambda I) = 0$ :

$$(2 - \lambda)(1 - \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$

# Beispiel Eigenwerte, Eigenvektoren

- Berechnung der Eigenvektoren  $v_i$  für jeden Eigenwert  $\lambda_i$  aus  $(A - \lambda I)v = \vec{0}$

$$\lambda_1 : \begin{pmatrix} 2-2 & 2 \\ 0 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i: } 2x_2 = 0 \quad x_2 = 0$$

$$\text{ii: } -1x_2 = 0 \quad x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 : \begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i: } 1x_1 + 2x_2 = 0 \quad 2x_2 = -x_1$$

$$\text{ii: } 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$